2. 设 A, B 分别为 1 到 500 之间能被 15，7 整除的整数集合，则所求为

$$|A| - |A \cap B| = \left\lfloor \frac{500}{15} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{500}{15 \times 7} \right\rfloor = 29.$$

3. 设 S, A, B 分别为 1 到 1000 之间整数集合，平方数和立方数的整数集合，则所求为

$$|\bar{A} + \bar{B}| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B|$$
$$= 1000 - \sqrt{1000} - \sqrt[3]{1000} + \sqrt[6]{1000}$$
$$= 1000 - 31 - 10 + 3 = 962$$

4. 令$S_\infty = \{\infty \cdot a, \infty \cdot b, \infty \cdot c, \infty \cdot d\}$，则$S_\infty$的 10 组合数为$\binom{4+10-1}{10} = 286$。设集合 A 是S_∞的 10 组合数全体，则$|A| = 286$。定义性质集合$P = \{P_1, P_2, P_3\}$，其中

P_1：10 组合中 b 的个数大于或等于 4；
P_2：10 组合中 c 的个数大于或等于 6；
P_3：10 组合中 d 的个数大于或等于 8。

将满足性质P_i的 10 组合全体记为$A_i(1 \leq \mathrm{i} \leq 3)$，则

$$|A_1| = \binom{10-4+4-1}{10-4} = 84，$$
$$|A_2| = \binom{10-6+4-1}{10-6} = 35，$$
$$|A_3| = \binom{10-8+4-1}{10-8} = 10，$$
$$|A_1 \cap A_2| = 1，$$
$$|A_1 \cap A_3| = 0，$$
$$|A_2 \cap A_3| = 0，$$
$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0。$$

由容斥原理知所求为

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = |A| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$
$$= 286 - (84 + 35 + 10) + (1 + 0 + 0) - 0$$
$$= 158.$$

5. 设集合A是该方程的所有正整数解全体，则$|A| = \binom{11+3-1}{11} = 78$。定义性质集合$P_i(i = 1,2,3)$：$x_i$的值大于或等于 9，将满足性质$P_i$的全体记为$A_i$，则

$$|A_1| = |A_2| = |A_2| = \binom{14-11+1}{14-11} = 10，$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 0,$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0.$$

由容斥原理知所求为

$$\begin{aligned}|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| &= |A| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) + \\ &\quad (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= 78 - (10 + 10 + 10) + (0 + 0 + 0) - 0 \\ &= 48.\end{aligned}$$

7. 先选 k 个整数排在它们的自然位置上，有$\binom{n}{k}$种选法。再将剩下的$n-k$个整数错排，有D_{n-k}种排法，所以所求排列数为$\binom{n}{k}D_{n-k}$。

8. 设集合 A 是 S 的全排列数全体，则$|A| = \frac{9!}{3!4!2!} = 1260$。定义性质集合$P = \{P_1, P_2, P_3\}$，其中

P_1：全排列中所有 a 相邻；

P_2：全排列中所有 b 相邻；

P_3：全排列中所有 c 相邻。

将满足性质P_i的排列全体记为$A_i(1 \le \mathrm{i} \le 3)$，则

$$|A_1| = \frac{7!}{1!\,4!\,2!} = 105,$$

$$|A_2| = \frac{6!}{3!\,1!\,2!} = 60,$$

$$|A_3| = \frac{8!}{3!\,4!\,1!} = 280,$$

$$|A_1 \cap A_2| = \frac{4!}{1!\,1!\,2!} = 12,$$

$$|A_1 \cap A_3| = \frac{6!}{1!\,4!\,1!} = 30,$$

$$|A_2 \cap A_3| = \frac{5!}{3!\,1!\,1!} = 20,$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \frac{3!}{1!\,1!\,1!} = 6.$$

由容斥原理知所求为

$$\begin{aligned}|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| &= |A| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) + \\ &\quad (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= 1260 - (105 + 60 + 280) + (12 + 30 + 20) - 6 \\ &= 871.\end{aligned}$$

13. (1)计算不包含数字 1,2,3,4 的整数：

一位数：5 个；

两位数：$5\times 6=30$个；

三位数：$5\times 6^2=180$个；

四位数：$5\times 6^3=1080$个；

五位数：$5\times 6^4=6480$个；

则 1 和 100000 之间包含数字 1,2,3,4 的整数的个数为

$$100000-5-30-180-1080-6480=92225.$$

(2) 一位数：4 个；

两位数：$4^2=16$个；

三位数：$4^3=64$个；

四位数：$4^4=256$个；

五位数：$4^5=1024$个；

则 1 和 100000 之间包含数字 1,2,3,4 的整数的个数为

$$4+16+64+256+1024=1364.$$

15. 设集合 A 是 n 对字母的全排列全体，则$|A|=\frac{(2n)!}{2^n}$。定义性质集合$P_i(i=1,2,\cdots,n)$：一对a_i相邻，将满足性质P_i的全体记为A_i，则

$$|A_i|=\frac{(2n-1)!}{2^{n-1}},$$

$$\left|A_i\cap A_j\right|=\frac{(2n-2)!}{2^{n-2}}(i<j;i,j=1,2,\cdots n),$$

$$\cdots$$

$$\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right|=\frac{(2n-k)!}{2^{n-k}}(i_1<i_2<\cdots<i_k;i_1,i_2,\cdots,i_k=1,2,\cdots n).$$

由容斥原理得，相同的一对字母不相邻的字的个数为

$$\begin{aligned}|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n}|&=|A|-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{1\le i<j\le n}\left|A_i\cap A_j\right|-\cdots\\&\quad+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|\\&=\frac{(2n)!}{2^n}-\binom{n}{1}\frac{(2n-1)!}{2^{n-1}}+\binom{n}{2}\frac{(2n-2)!}{2^{n-2}}-\cdots+(-1)^n n!.\end{aligned}$$

16. (1)$\frac{(2n)!}{2n}=(2n-1)!$.

(2)设集合 A 是 $2n$ 个代表的全排列全体，则$|A|=(2n-1)!$。定义性质集合$P_i(i=1,2,\cdots,n)$：第 i 个单位的两个代表相邻，将满足性质P_i的全体记为A_i，则

$$|A_i|=2\cdot\frac{(2n-1)!}{2n-1}=2\cdot(2n-2)!,$$

$$\left|A_i\cap A_j\right|=2^2\cdot\frac{(2n-2)!}{2^{n-2}}=2^2\cdot(2n-3)!\,(i<j;i,j=1,2,\cdots n),$$

$\cdots$

$$\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right|=2^k\cdot(2n-k-1)!\,(i_1<i_2<\cdots<i_k;i_1,i_2,\cdots,i_k=1,2,\cdots n).$$

由容斥原理得，各单位的两位代表不相邻的方案数为

$$\begin{aligned}&|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n}|\\&=|A|-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{1\le i<j\le n}\left|A_i\cap A_j\right|-\cdots+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|\\&=(2n-1)!-\binom{n}{1}2\cdot(2n-2)!+\binom{n}{2}2^2\cdot(2n-3)!-\cdots+(-1)^n(n-1)!.\end{aligned}$$

17. (1)m 层的错排数为

$$D_m=m!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^m\frac{1}{m!}\right).$$

每层图书的全排列数为$n!$，有 m 层，共$(n!)^m$。故 m 类图书全不在原来层次上的方案数为

$$(n!)^mD_m.$$

(2)先在 m 层中取$k(k=2,3,\cdots,m)$层进行错排，对这 k 层的书进行全排列；剩下的$m-k$层中，对每层数进行错排，故每层的 n 本书都不在原来位置上的方案数为

$$\sum_{k=2}^{m}\binom{m}{k}(n!)^kD_k(D_n)^{m-k}.$$

23.

$$\because\ \varphi(n)=n\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d},$$

$$\therefore\ \frac{1}{n}\sum_{d|n}\varphi(d)m^{\frac{n}{d}}=\frac{1}{n}\sum_{d|n}d\sum_{d'|d}\frac{\mu(d')}{d'}m^{\frac{n}{d}}=\sum_{d|n}\sum_{d'|d}m^{\frac{n}{d}}\frac{d}{nd'}\mu(d').$$

令$d''=\frac{nd'}{d}$，则d''与 d 在取值上一一对应，所以$\frac{nd'}{d''}$与d''也一一对应，所以

$$\text{上式}=\sum_{\frac{nd'}{d''}\big|n}\sum_{d'\big|\frac{nd'}{d''}}\frac{m^{\frac{d''}{d'}}}{d''}\mu(d')=\sum_{d''|n}\frac{1}{d''}\sum_{d'|d''}\sum_{d'|d''}\mu(d')m^{\frac{d''}{d'}}.$$

记d''为 d，则上式 = 左边。

25. 本题棋盘B如图 1 所示，将其变换后如图 2 所示。

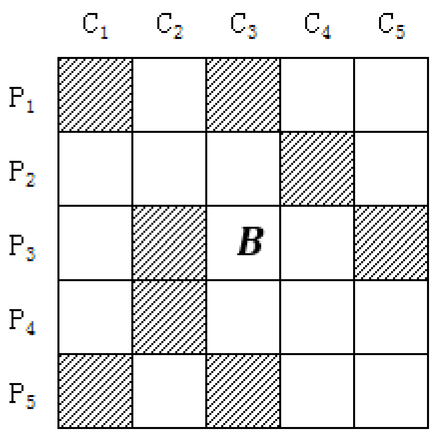

图1

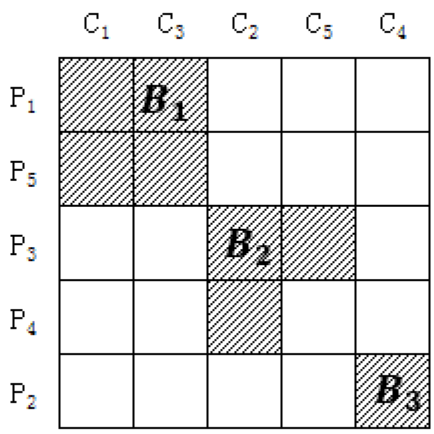

图2

则

$$R(x,B_1)=1+4x+2x^2, R(x,B_2)=1+3x+2x^2, R(x,B_3)=1+x.$$

$$\begin{aligned} R(x,B) &= R(x,B_1)\cdot R(x,B_2)\cdot R(x,B_3) \\ &= 1+8x+22x^2+25x^3+12x^4+2x^5. \end{aligned}$$

所以 5 名旅客去 5 个地方的所有方法数为

$$N(0)=5!-8\cdot 4!+22\cdot 3!-25\cdot 2!+12\cdot 1!+2\cdot 0!=20.$$

如果P_1去C_5，原棋盘变为B'，如图 3 所示，将其变换后如图 4 所示。

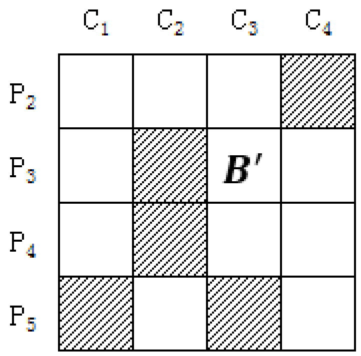

图3

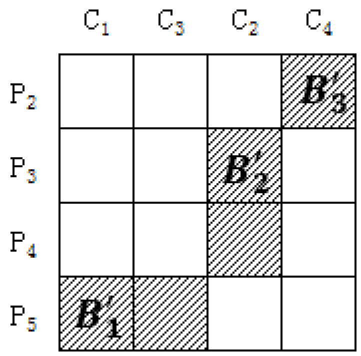

图4

则

$$R(x,B_1')=1+2x, R(x,B_2')=1+2x, R(x,B_3')=1+x.$$

$$\begin{aligned} R(x,B') &= R(x,B_1')\cdot R(x,B_2')\cdot R(x,B_3') \\ &= 1+5x+8x^2+4x^3. \end{aligned}$$

所以已知P_1去C_5，5 名旅客去 5 个地方的所有方法数为

$$N'(0)=4!-5\cdot 3!+8\cdot 2!-4\cdot 1!+0\cdot 0!=6.$$

综上所述，P_1去C_5的概率为$\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$。

28. 从集合$\{a_1,a_2,\cdots,a_{n+m-1}\}$这$n+m-1$个元素中取 n 个元素，其中这 n 个元素包括$a_1,a_2,\cdots,a_m$，方法数为$\binom{n-1}{n-m}=\binom{n-1}{n-m}$。

接下来使用容斥原理计算。设集合 A 是从集合$\{a_1,a_2,\cdots,a_{n+m-1}\}$中取 n 个元

素的全体取法，则$|A| = \binom{n+m-1}{n}$。定义性质集合$P_i(i = 1,2,\cdots,m)$：取出的元素不包括a_i，将满足性质P_i的全体记为A_i，则

$$|A_i| = \binom{n+m-1-1}{n},$$

$$\left|A_i \cap A_j\right| = \binom{n+m-1-2}{n}(i < j; i,j = 1,2,\cdots m),$$

$$\cdots$$

$$\left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right| = \binom{n+m-1-k}{n}(i_1 < i_2 < \cdots < i_k; i_1, i_2, \cdots, i_k = 1,2,\cdots m).$$

由容斥原理得，从集合$\{a_1, a_2, \cdots, a_{n+m-1}\}$中取 n 个元素，其中这 n 个元素包括$a_1, a_2, \cdots, a_m$的方法数为

$$\begin{aligned}&|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}|\\ &= |A| - \sum_{i=1}^{n}|A_i| + \sum_{1\le i<j\le n}\left|A_i \cap A_j\right| - \cdots + (-1)^n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|\\ &= \binom{n+m-1-1}{n} - \binom{m}{1}\binom{n+m-1-2}{n} - \cdots + (-1)^n\binom{m}{m}\binom{n+m-1-2}{n}\\ &= \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\binom{n+m-1-k}{n}.\end{aligned}$$

原等式得证。（注：等式右边也可以看做从多重集合$\{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \cdots, \infty \cdot a_n\}$中取 n 个元素，其中每个元素至少取一次的方法数。）

29. (1)6^n。

(2)设集合 A 为 n 个乘客离开电梯的方法全体，则$|A| = 6^n$。定义性质集合$P_i(i = 1,2,\cdots,6)$：没有人在第$4+i$层离开电梯，将满足性质P_i的全体记为A_i，则

$$|A_i| = 5^n,$$

$$\left|A_i \cap A_j\right| = 4^n(i < j; i,j = 1,2,\cdots 6),$$

$$\cdots$$

$$\left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right| = (6-k)^n(i_1 < i_2 < \cdots < i_k; i_1, i_2, \cdots, i_k = 1,2,\cdots 6).$$

由容斥原理得，n 个乘客离开电梯的方法数为

$$\begin{aligned}&|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}|\\ &= |A| - \sum_{i=1}^{n}|A_i| + \sum_{1\le i<j\le n}\left|A_i \cap A_j\right| - \cdots + (-1)^n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|\\ &= 6^n - \binom{6}{1}5^n + \binom{6}{2}4^n - \binom{6}{3}3^n + \binom{6}{4}2^n - \binom{6}{5}1^n + \binom{6}{6}0^n.\end{aligned}$$